Prox Computations

$f(\mathbf{x})$	$\text{dom}(f)$	$\text{prox}_f(\mathbf{x})$	assumptions
$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}+c$	$\mathbb{R}^n$	$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{b})$	$\mathbf{A}\in\mathbb{S}^n_+$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$
λx^3	$\mathbb{R}_+$	$\frac{-1+\sqrt{1+12\lambda[x]_+}}{6\lambda}$	$\lambda>0$
μx	$[0,\alpha]\cap\mathbb{R}$	$\min\{\max\{x-\mu,0\},\alpha\}$	$\mu\in\mathbb{R}$, $\alpha\in[0,\infty]$
$\lambda\\|\mathbf{x}\\|$	$\mathbb{E}$	$\left(1-\frac{\lambda}{\max\{\\|\mathbf{x}\\|,\lambda\}}\right)\mathbf{x}$	$\\|\cdot\\|$ - Euclidean, $\lambda>0$
$-\lambda\\|\mathbf{x}\\|$	$\mathbb{E}$	$\left(1+\frac{\lambda}{\\|\mathbf{x}\\|}\right)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, $\{\mathbf{u}:\\|\mathbf{u}\\|=\lambda\}, \quad \mathbf{x}=\mathbf{0}$.	$\\|\cdot\\|$ - Euclidean, $\lambda>0$
$\lambda\\|\mathbf{x}\\|_1$	$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{T}_\lambda(\mathbf{x})=[\lvert\mathbf{x}\rvert-\lambda\mathbf{e}]_+\odot\text{sgn}(\mathbf{x})$	$\lambda>0$
$\\|\boldsymbol{\omega}\odot\mathbf{x}\\|_1$	$\text{Box}[-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]$	$\mathcal{S}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$	$\boldsymbol{\alpha}\in[0,\infty]^n$,$\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^n_{++}$
$\lambda\\|\mathbf{x}\\|_\infty$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbf{x}-\lambda P_{B_{\\|\cdot\\|_1}[\mathbf{0},1]}(\mathbf{x}/\lambda)$	$\lambda>0$
$\lambda\\|\mathbf{x}\\|_a$	$\mathbb{E}$	$\mathbf{x}-\lambda P_{B_{\\|\cdot\\|_{a,*}}[\mathbf{0},1]}(\mathbf{x}/\lambda)$	$\\|\mathbf{x}\\|_a$ – norm, $\lambda>0$
$\lambda\\|\mathbf{x}\\|_0$	$\mathbb{R}^n$	$H_{\sqrt{2\lambda}}(x_1)\times\cdots\times H_{\sqrt{2\lambda}}(x_n)$	$\lambda>0$
$\lambda\\|\mathbf{x}\\|^3$	$\mathbb{E}$	$\frac{2}{1+\sqrt{1+12\lambda\\|\mathbf{x}\\|}}\mathbf{x}$	$\\|\cdot\\|$ - Euclidean, $\lambda>0$
$-\lambda\sum_{j=1}^n\log x_j$	$\mathbb{R}^n_{++}$	$\left(\frac{x_j+\sqrt{x_j^2+4\lambda}}{2}\right)_{j=1}^n$	$\lambda>0$
$\delta_C(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$P_C(\mathbf{x})$	$\emptyset\neq C\subseteq\mathbb{E}$
$\lambda\sigma_C(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$\mathbf{x}-\lambda P_C(\mathbf{x}/\lambda)$	$\lambda>0$, $C\neq\emptyset$ closed convex
$\lambda\max\{x_i\}$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbf{x}-P_{\Delta_n}(\mathbf{x}/\lambda)$	$\lambda>0$
$\lambda\sum_{i=1}^k x_{[i]}$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbf{x}-\lambda P_C(\mathbf{x}/\lambda)$, $C=H_{\mathbf{e},k}\cap\text{Box}[\mathbf{0},\mathbf{e}]$	$\lambda>0$
$\lambda\sum_{i=1}^k\lvert x_{\langle i\rangle}\rvert$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbf{x}-\lambda P_C(\mathbf{x}/\lambda)$, $C=B_{\\|\cdot\\|_1}[\mathbf{0},k]\cap\text{Box}[-\mathbf{e},\mathbf{e}]$	$\lambda>0$
$\lambda M_f^\mu(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$\mathbf{x}+\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(\text{prox}_{(\mu+\lambda)f}(\mathbf{x})-\mathbf{x}\right)$	$\lambda,\mu>0$, f proper closed convex
$\lambda d_C(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$\mathbf{x}+\min\left\{\frac{\lambda}{d_C(\mathbf{x})},1\right\}(P_C(\mathbf{x})-\mathbf{x})$	$\emptyset\neq C$ closed convex, $\lambda>0$
$\frac{\lambda}{2}d_C^2(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$\frac{\lambda}{\lambda+1}P_C(\mathbf{x})+\frac{1}{\lambda+1}\mathbf{x}$	$\emptyset\neq C$ closed convex, $\lambda>0$
$\lambda H_\mu(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$\left(1-\frac{\lambda}{\max\{\\|\mathbf{x}\\|,\mu+\lambda\}}\right)\mathbf{x}$	$\lambda,\mu>0$
$\rho\\|\mathbf{x}\\|_1^2$	$\mathbb{R}^n$	$\left(\frac{v_ix_i}{v_i+2\rho}\right)_{i=1}^n$, $\mathbf{v}=\left[\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\lvert\mathbf{x}\rvert-2\rho\right]_+$,$\mathbf{e}^T\mathbf{v}=1$ ($\mathbf{0}$ when $\mathbf{x}=\mathbf{0}$)	$\rho>0$
$\\|\mathbf{A}\mathbf{x}\\|_2$	$\mathbb{R}^n$	$\mathbf{x}-\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T+\alpha^*\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\alpha^*=0$ if $\\|\mathbf{v}_0\\|_2\leq\lambda$; otherwise, $\\|\mathbf{v}_{\alpha^*}\\|_2=\lambda$; $\mathbf{v}_\alpha\equiv(\mathbf{A}\mathbf{A}^T+\alpha\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}$	$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ with full row rank

Prox of Symmetric Spectral Functions over $\mathbb{S}^n$

$F(\mathbf{X})$	$\mathrm{dom}(F)$	$\mathrm{prox}_F(\mathbf{X})$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F^2$	$\mathbb{S}^n$	$\frac{1}{1+2\alpha}\mathbf{X}$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F$	$\mathbb{S}^n$	$\left(1-\frac{\alpha}{\max\{\|\mathbf{X}\|_F,\alpha\}}\right)\mathbf{X}$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{S_1}$	$\mathbb{S}^n$	$\mathbf{U}\mathcal{T}_\alpha(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}))\mathbf{U}^T$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{2,2}$	$\mathbb{S}^n$	$\mathbf{U}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X})-\alpha P_{B_{\|\cdot\|_1}[\mathbf{0},1]}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X})/\alpha))\mathbf{U}^T$
$-\alpha\log\det(\mathbf{X})$	$\mathbb{S}^n_{++}$	$\mathbf{U}\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_j(\mathbf{X})+\sqrt{\lambda_j(\mathbf{X})^2+4\alpha}}{2}\right)\mathbf{U}^T$
$\alpha\lambda_1(\mathbf{X})$	$\mathbb{S}^n$	$\mathbf{U}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X})-\alpha P_{\Delta_n}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X})/\alpha))\mathbf{U}^T$
$\alpha\sum_{i=1}^k\lambda_i(\mathbf{X})$	$\mathbb{S}^n$	$\mathbf{X}-\alpha\mathbf{U}P_C(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X})/\alpha)\mathbf{U}^T$, $C=H_{\mathbf{e},k}\cap\mathrm{Box}[\mathbf{0},\mathbf{e}]$

Prox of Symmetric Spectral Functions over $\mathbb{R}^{m\times n}$

$F(\mathbf{X})$	$\mathrm{prox}_F(\mathbf{X})$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F^2$	$\frac{1}{1+2\alpha}\mathbf{X}$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F$	$\left(1-\frac{\alpha}{\max\{\|\mathbf{X}\|_F,\alpha\}}\right)\mathbf{X}$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{S_1}$	$\mathbf{U}\mathcal{T}_\alpha(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}))\mathbf{V}^T$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{S_\infty}$	$\mathbf{X}-\alpha\mathbf{U}\mathrm{diag}(P_{B_{\|\cdot\|_1}[\mathbf{0},1]}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})/\alpha))\mathbf{V}^T$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{\langle k\rangle}$	$\mathbf{X}-\alpha\mathbf{U}P_C(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})/\alpha)\mathbf{V}^T$, $C=B_{\|\cdot\|_1}[\mathbf{0},k]\cap B_{\|\cdot\|_\infty}[\mathbf{0},1]$